

MËSIMDHËNIA E MATEMATIKËS ME GEOGEBRA: ZBATIME NË TELEFONIN CELULAR

**Alondra SPAHIU¹,
Lorenc EKONOMI²**

¹Shkolla “Dhimitraq Gjata”, Rëmbec,
spahiu.alondra@gmail.com

²Fakulteti i Shkencave Natyrore dhe Shkencave Humane,
Universiteti “Fan S. Noli”, Korçë
lekonomi@unkorce.edu.al

Abstrakt

Përdorimi i teknologjisë në procesin pedagogjik po rritet me një ritëm të pamenduar më parë për shkak të disponueshmërisë së madhe të pajisjeve elektronike (kompjuterë, tableta, celularë etj.), aplikacioneve në to dhe rezultateve të shkëlqyera të arritura gjatë përdorimit të tyre në mësimdhënie. Si rrjedhim, institucionet e arsimit e shohin urgjente nevojën për integrimin e teknologjisë gjatë procesit mësimor sa i përket matematikës dhe jo vetëm. Qëllimi i këtij punimi është të hulumtojë mënyrën e zhvillimit të procesit mësimor duke përdorur programin GeoGebra, si dhe aftësitë përshtatëse të nxënësve ndaj këtij mjeti. Kjo është realizuar përmes një qasjeje eksperimentale, duke shpjeguar të njëjtat tema mësimore në dy klasa paralele: në njërën klasë është përdorur GeoGebra, ndërsa në tjetrën janë përdorur vetëm metoda tradicionale të mësimdhënies.

Nga vëzhgimet e kryera gjatë orëve të mësimi është arritur në përfundimin se përdorimi i GeoGebra- s ndikon pozitivisht në rritjen e performancës së nxënësve, në përmirësimin e të kuptuarit, të menduarit analitik, aftësisë për përgjithësim, të menduarit abstrakt, përfaqësimit dhe arsytimit logjik. Nxënësit janë në gjendje ta eksplorojnë këtë softuer në mënyrë të pavarur dhe të përvetësojnë koncepte matematikore me ndihmën minimale të mësuesit. Megjithatë, efektiviteti i tij varet nga mënyra se si integrimi i teknologjisë realizohet në procesin e mësimdhënies dhe të të nxënësit. Për zhvillimin e orëve mësimore, nxënësit përdorën tabletat ose celularët e tyre personalë.

Fjalët kyçe: GeoGebra, celular, tabletë, mësimdhënie, matematikë

TEACHING MATHEMATICS WITH GEOGEBRA: APPLICATIONS ON MOBILE PHONE

Abstract

The use of technology in the pedagogical process is growing at an unprecedented rate due to the wide availability of electronic devices (computers, tablets, mobile phones, etc.), applications on them and the excellent results achieved during their use in teaching. Consequently, educational institutions see the urgent need to integrate technology during the teaching process in terms of mathematics and not only. The purpose of this paper is to investigate the way the teaching process is developed using GeoGebra and the adaptive skills of students with it. This was done by developing in an experimental form the explanation of the same teaching topics in two parallel classes, in one class using GeoGebra and in the other class only with traditional methods. From the observations made during the lessons, it was concluded that GeoGebra increases students' performance, comprehension, analytical thinking, generalization, abstract thinking, representation and logical thinking. Students can independently explore this software and acquire mathematical concepts with minimal teacher assistance, but effectiveness depends on how its use is integrated into the teaching and learning process. Students used their personal tablets or mobile phones to conduct lessons.

Keywords: GeoGebra, mobile, tablet, teaching, mathematics

Hyrje

Procesi i mësimdhënies është një proces kompleks, i cili kërkon aftësi të konsiderueshme për menaxhimin e një sërë hapash dhe detyrash për t'u zhvilluar me sukses. Duke qenë se ky është një proces i përditshëm, për të shmangur monotoninë është e nevojshme të përdoret strategjia e kombinimit të metodave të ndryshme të mësimdhënies. Ndërkohë, teknologjia po zhvillohet me ritme shumë të shpejta dhe po depërton në të gjitha fushat e jetës, përfshirë edhe arsimin. Kjo prani në arsim realizohet përmes platformave, softuerëve dhe aplikacioneve të ndryshme që janë në dispozicion për përdorim. Në këtë artikull trajtohet platforma GeoGebra si një softuer që integron teknologjinë në arsim, veçanërisht gjatë zhvillimit të procesit mësimor në lëndën e matematikës.

Teknologjia po transformon arsimin, po ndryshon mënyrën, kur dhe ku mësojnë studentët dhe po i fuqizon ata në çdo fazë të rrugëtimit të tyre. Sipas një raporti të ri nga “Cambridge International”, i cili

bazohet në një anketim të zhvilluar online me afro 20,000 mësues dhe studentë (mosha 12– 19) nga 100 vende të botës, përdorimi i teknologjisë në shkolla vazhdon të rritet. Sipas statistikave të raportuara, 48% e studentëve raportojnë se përdorin një kompjuter desktop në klasë, 42% përdorin telefona inteligjentë, 33% përdorin tabela të bardha interaktive dhe 20% përdorin tableta. Megjithatë, shifrat mbeten të larta edhe për mënyrat tradicionale, të tilla si stilolapsa dhe letra 90% dhe tabelat e bardha 73%. Kompjuterët desktop përdoren dukshëm më shumë se tabletët: SHBA kryeson me 75% të klasave që përdorin kompjutera desktop. Përdorimi i desktopëve, laptopëve dhe tabletëve shpesh e bën mësimin më argëtues dhe tërheqës dhe krijohet një mjedis ku studentët janë të prirur të komunikojnë dhe të ndihmojnë njëri-tjetrin (Kovacs, 2018, Uwurukundo dhe të tjerë, 2020).

Një fushë e veçantë e teknologjisë, që sondazhi theksoi se po zgjerohet, janë telefonat inteligjentë. Me teknologjinë celulare më të integruar në jetën e njerëzve, parashikohet se përdorimi i smartfonëve në klasë mund të arrijë 55% në vitin 2018 në nivel global. Shtetet e Bashkuara tashmë e kanë tejkaluar shumë këtë numër dhe kryesojnë në botë me telefonat inteligjentë, si Samsung Galaxy S9, i përdorur në 74% të klasave.

Lejimi i përdorimit të telefonave inteligjentë në klasë vazhdon të jetë një çështje debati për shumë autoritete arsimore. Departamenti i Arsimit i Shtetit të Nju Jorkut hoqi në vitin 2015 një ndalim 10-vjeçar për përdorimin e telefonave inteligjentë në shkolla, ndërsa qeveria franceze vendosi një ndalim për këto pajisje në shkollat e mesme. Shqetësimet e kundërshtarëve lidhen kryesisht me potencialin e pajisjeve për të shpërqendruar nxënësit dhe për të penguar komunikimin me bashkëmoshatarët në klasë. Megjithatë, mësuesit vazhdojnë të gjejnë mënyra të reja për të përdorur këto mjete në mënyrë efektive në procesin mësimor (Stols, 2009).

Një tjetër prirje e avancuar që po zhvillohet me shpejtësi nëpër klasa është rritja e popullaritetit të teknologjive zhytëse si realiteti virtual dhe realiteti i shtuar. Ndikimi i teknologjisë në arsim vazhdon edhe për studentët jashtë klasës. Sondazhi zbuloi se 64% e studentëve përdorin një smartphone për të bërë detyrat e tyre të shtëpisë dhe 65% i bëjnë detyrat e tyre në një kompjuter notebook (ky numër rritet në 85% në SHBA) (Uwurukundo dhe të tjerë, 2020).

Raporti përfundimisht zbulon se si mësuesit, ashtu edhe studentët mbështeten në teknologji për të shtuar vlerën dhe për të përmirësuar procesin arsimor. Pritet që në të ardhmen nxënësit të zhvillojnë një autonomi më të madhe në procesin e të nxënësve, duke zgjedhur teknologjinë që u përshtatet më mirë nevojave të tyre. Telefonat inteligjentë, laptopët dhe kompjuterët desktop do të jenë padyshim pjesë e këtij kombinimi, krahas mjeteve tradicionale si stilolapsi dhe letra (Bernstein 2019; Uwurukundo dhe të tjerë, 2020).

Interes të veçantë ka marrë edhe mësimi i kombinuar (Blended Learning). Mësimi i kombinuar synon të kombinojë përdorimin e teknologjisë me format tradicionale të mësimdhënies (Ekonomi dhe të tjerë, 2022), që do të thotë përdorimi i mjeteve smart si (smartphone, tablet, laptop) në bazë të mundësisë nga ana e nxënësve, por sigurisht edhe nga institucioni, me qëllim integrimin e nxënësve në teknologji, përqafimin e metodave më të avancuara, përthithjen ose përvetësimin më të shpejtë të materialit, efektshmërinë më të madhe në rezultate, etj.

Në këtë artikull paraqitet edhe mënyra e shkarkimit të aplikacionit GeoGebra në sistemet iOS dhe Android për smartphone, si dhe zbatimi i tij përmes ushtrimeve dhe shembujve të përzgjedhur nga literatura të ndryshme: kryesisht nga librat shkollorë. Gjithashtu, janë zhvilluar disa orë mësimore në mënyrë eksperimentale, duke trajtuar të njëjtën temë në dy klasa paralele: në njërin klasë është përdorur softueri GeoGebra, ndërsa në tjetrën është përdorur vetëm metoda tradicionale e mësimdhënies. Gjatë këtij procesi është vëzhguar sjellja dhe reagimi i nxënësve në të dyja klasat dhe më pas është realizuar një krahasim i detajuar i rezultateve dhe reagimeve të tyre.

Në përfundim, mund të thuhet se integrimi i teknologjisë në arsim kërkon mënyra të mirorganizuara dhe të përshtatshme aplikimi, në mënyrë që efektiviteti i përdorimit të saj të jetë sa më i lartë. *GeoGebra* rezulton të jetë një softuer shumë i dobishëm për mësimdhënien dhe mësimnxënien e matematikës dhe gjen mbështetje të gjerë si nga nxënësit, ashtu edhe nga mësuesit.

1. GEOGEBRA

GeoGebra është një softuer dinamik, që përfshin algjebërën, statistikën, aritmetikën dhe gjeometrinë dhe përdoret për mësimin e matematikës dhe shkencës në të gjitha nivelet, që nga niveli fillor e deri në nivelin universitar. Emri i këtij programi është i përbërë nga fjalët Geometry dhe alGebra. GeoGebra konsiderohet si ofruesi kryesor i matematikës që mbështet shkencën, teknologjinë, inxhinierinë dhe matematikën dhe inovacionet në mësimdhënie dhe mësimnxënie në mbarë botën (*Phelps, 2013, Achritan dhe të tjerë, 2016, Cruz, 2017, Kovacs, 2018, Wassie dhe të tjerë, 2019, Tamam dhe Dasari, 2021, Reynolds, 2021, Ekonomi dhe të tjerë, 2022*). GeoGebra është në dispozicion në platforma të shumta me aplikacionet e saj për Windows, macOS dhe Linux, si dhe me aplikacionet e saj për tabletë për Android, iPad dhe Windows apo edhe me aplikacionin e saj të internetit të bazuar në teknologjinë HTML5. Krijuesi i saj, Markus Hohenwarter, filloi projektin në vitin 2001 në Universitetin e Salzburgut, duke vazhduar atë në universitete të tjera së bashku me ndihmën e zbuluesve të programeve tjera me kod të hapur dhe përkthyesve nga e gjithë bota. Shkarkimi dhe përdorimi i këtij programi është plotësisht falas, në mënyrë që të jetë i aksesueshëm për të gjithë. Ikona e programit GeoGebra ka pamjen e mëposhtme:

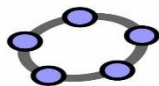


Figura 1. Ikona e aplikacionit GeoGebra

1.1 GeoGebra në tablet (Smartphone, sistemi iOS, Android)

Që nxënësit të përdorin *GeoGebra* nuk është e domosdoshme që ata të kenë një kompjuter përpara vetes ose të ndodhen patjetër në një laborator informatike. Mjafton të përdorin një mobile ose tabletë të mbështetur nga sistemi iOS ose Android dhe përdorimi është mjaft i thjeshtë.

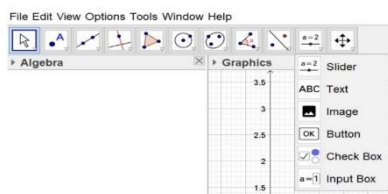
Le të shohim hap pas hapi instalimin dhe përdorimin e programit mbështetur nga të dy sistemet. Për të instaluar programin GeoGebra në sistemin iOS fillimisht shkojmë tek *AppStore* dhe tek opsioni *Searching* kërkojmë GeoGebra. Shohim opsionet që na shfaqen. Dallojmë ikonën GeoGebra të figurës 1 dhe klikojmë opsionin e

Upload në të djathtë dhe shohim që programi po instalohet. Pasi *GeoGebra* është instaluar plotësisht, në të djathtë të ekranit të pajisjes na shfaqet opsioni *Open*. Procesojmë duke klikuar mbi opsionin *Open* dhe na paraqitet ikona e njohur që tregon se programi është instaluar me sukses.

Për të instaluar programin *GeoGebra* në një pajisje smart e cila mbulohet nga sistemi Android vemë në dukje se ndryshimi i vetëm midis sistemit iOS dhe sistemit Android është se tek ky i fundit, do të shkojmë në fillim tek *PlayStore*. Më pas ndjekim rrugën hap pas hapi si më lart.

1.2 Disa nga komandat kryesore të GeoGebra

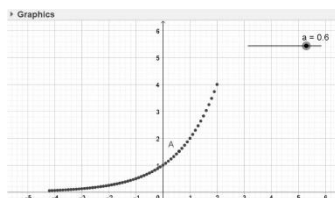
Figura 2. Pamje e përgjithshme e GeoGebra



Në figurë vemë në dukje opsionet: Slider (Rrëshqitës), Check Box (Kuti për zgjedhje) dhe Input Box (Kuti për hyrje).

Opsioni *Slider* na lejon të krijojmë animacione të ndryshme të cilat ndihmojnë nxënësit të kuptojnë më lehtë problema të ndryshëm si për shembull: Nëse marrim grafikun e funksionit $y = 2^x$ shpesh nxënësit përfaqësojnë një kurbë të vazhduar. *GeoGebra* nëpërmjet përdorimit të “Slider” ndihmon nxënësit të dallojnë se në fakt grafiku i funksionit të mësipërm është një bashkësi pikash:

Figura 3. Grafiku i funksionit $y = 2^x$



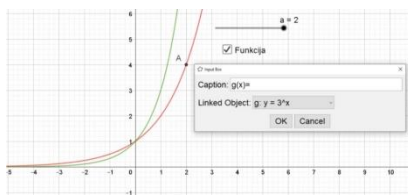
Opsioni *Check Box* hap një dritare e cila ndihmon përdoruesin ose nxënësit në këtë rast të lidhin këtë fushë me disa nga objektet. Në rastin tonë, objekti është një funksion. Pra, marrim një fushë, e cila tregon funksionin që ne e përzgjedhim, në të kundërt funksioni nuk do të shfaqet në *GeoGebra*. Paraqitja e kutisë përzgjedhëse *Check Box*, si dhe dy rastet kur fusha është e përzgjedhur dhe e papërzgjedhur:

Figura 4. Check Box në dy rastet kur fusha është e përzgjedhur dhe e papërzgjedhur



Opsioni *Input Box* do të shfaqë një kuti dialoguese si më poshtë:

Figura 5. Kutia dialoguese e Input Box



Duke ndryshuar vlerën në kutinë *Input Box* do të ndryshojnë gjithashtu edhe vlerat e funksionit, duke i lejuar përdoruesit të ndryshojë vlerat e objekteve tashmë të përcaktuara me ndryshimin e vlerave të këtyre fushave.

2. DISA ORË MËSIMORE ME DHE PA GEOGEBRA

Ne zhvilluam disa orë mësimi duke ndërthurrur GeoGebra me mësimdhënien tradicionale dhe disa orë mësimore vetëm me metoda tradicionale në dy klasa të ndryshme. Këto orë mësimi u zhvilluan në klasën XI^B dhe klasën XI^C të shkollës “Themistokli Gërmenji” gjatë zhvillimit të praktikës mësimore me qëllim studimi. Numri i nxënësve

në të dy klasat ishte përkatësisht 30 dhe 31. U vrojtua sjellja e nxënësve nga mentori i praktikës. Tema e mësimit ishte: “Pasqyrimi dhe zgjatja e grafikëve” (19.7, Matematika 10-11, pjesa e dytë, Botimet Mediaprint). Më poshtë po japim përshkrimin e orëve mësimore të zhvilluara.

2.1 Orë mësimore pa përdorur *GeoGebra*

Po japim ndërtimin orës mësimore të përmendur më sipër pa përdorur *GeoGebra*, por vetëm metodën tradicionale. Para se të kalojmë tek tema e ditës fillimisht bëjmë lidhjen me njohuritë e mëparshme dhe u rikujtojmë nxënësve duke përdorur tabelën mësimore se: nëse kemi $y = f(x)$ dhe kalojmë në funksionin në $y = f(x) \pm a$, grafiku i funksionit do të zhvendoset lart ose poshtë paralelisht me veten.

E ilustruam me një shembull në tabelë: “Jepet funksioni $y = x^2$. Skiconi grafikun e tij dhe më pas në të njëjtin sistem koordinativ skiconi grafikun e funksionit $y = x^2 + 1$ dhe gjeni vektorin me të cilin zhvendoset grafiku.” Për ndërtimin e grafikut të funksionit të dytë marrim thjesht një pikë që me një llogaritje të shpejtë të ndërtojmë lehtësisht grafikun. Marrim pikën $A(2,4)$ dhe pasi kryejmë zvendësimin tek funksioni i dytë pika shëmbëllim ka koordinatat $A'(2,5)$. Në këtë mënyrë ndërtojmë grafikun dhe ruajmë të qenit paralel me grafikun e funksionit të parë. Vizatojmë në tabelë grafikun dhe secili nga nxënësit në fletoret e tyre të klasës. Vektori me të cilin zhvendoset grafiku ka koordinata $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Në të njëjtën mënyrë vazhdojmë lidhjen e njohurive me temën e mëparshme dhe u rikujtojmë nxënësve se, nëse kemi funksionin e trajtës $y = f(x)$ i cili kalon në funksionin e trajtës $y = f(x \pm a)$, atëherë grafiku do të zhvendoset majtas ose djathtas në varësi të vlerës së a . E ilustruam përsëri me shembull si në rastin e mësipërm.

Kalojmë tek mësimi i ditës dhe iu shpjegojmë nxënësve se nga funksioni i trajtës $y = f(x)$, mund të kemi trajta të tjera të tipit: $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, $y = af(x)$, $y = f(ax)$.

Ndajmë tabelën në disa pjesë për të shkruar njëkohësisht të gjitha trajtat që mund të marrë funksioni, ilustruam secilin rast me shembuj dhe paraqitja në të njëjtën kohë në tabelë bëhet me qëllim që nxënësit të bëjnë krahasimin dhe të venë re mënyrën e zhvendosjes të grafikëve.

Për secilën nga trajtat përdorim një funksion të ndryshëm me qëllim që të rikujtojmë dhe grafikët e funksioneve: $y = f(x) \rightarrow y = -f(x)$, $y = x^2 \rightarrow y = -x^2$. Vizatojmë grafikët në tabelë në të njëjtin sistem koordinativ. Drejtojmë pyetjen tek nxënësit se çfarë venë re. Marrim rastin $y = f(x) \rightarrow y = f(-x)$, $y = x \rightarrow y = -x$. Pas përgjigjeve të nxënësve i ftojmë ata të shkruajnë në fletoren e klasës pohimet:

a) “Grafiku i funksionit $y = f(-x)$ është simetrik me grafikun e funksionit $y = f(x)$ në lidhje me boshtin e Y’Y.”

b) “Grafiku i funksionit $y = -f(x)$ është simetrik me grafikun e funksionit $y = f(x)$ në lidhje me boshtin e X’X.”

Shqyrtojmë rastet: $y = f(x) \rightarrow y = af(x)$, $y = x^2 \rightarrow y = 3x^2$. Vizatojmë grafikët në tabelë në të njëjtin sistem koordinativ. Drejtoj pyetjen tek nxënësit se çfarë venë re. Vazhdojmë me $y = f(x) \rightarrow y = f(ax)$, $y = x^2 \rightarrow y = (3x)^2$. Pas përgjigjeve të nxënësve se çfarë venë re i ftojmë ata të shkruajnë në fletoren e klasës pohimet:

c) “Për çdo funksion f , transformimi që kalon grafikun e $y = f(x)$ në grafikun e $y = af(x)$ është një zgjatje (shtypje) me koeficient zgjatjeje (shtypjeje) a paralel me boshtin e y-ve.”

d) “Për çdo funksion f , transformimi që kalon grafikun e $y = f(x)$ në grafikun e $y = f(ax)$ është një zgjatje (shtypje) me koeficient zgjatjeje (shtypjeje) a paralel me boshtin e x-ve.”

Më pas punojmë ushtrimet 1, 2, 3, fq 289 dhe ushtrimin 5 fq 290. Ftojmë nxënësit me dëshirë të çohen në tabelë dhe të zgjidhin ushtrimet që vijnë.

Ushtrimi 1, f. 289 (Matematika 10-11, pjesa e dytë, Botimet Mediaprint) Jepet $f(x) = 6x - 4$.

Shkruaj të plotë: a) $f(-x) = -6x - 4$, b) $-f(x) = -6x + 4$.

Ushtrimi 2, f. 289 $g(x) = 2x + 5$. Gjej: a) $-g(-3) = 1$, b) $2g(10) = 50$.

Ushtrimi 3, fq 289 Jepet grafiku i $y = \cos x$. Nxënësit shqyrtojnë grafikun e dhënë në tekstin mësimor. Skico grafikun e a) $y = -\cos x$, b) $y = 2\cos x$.

Ftojmë dy nxënës të zgjidhin pikën a) dhe b) të ushtrimit. Secili nga nxënësit drejtohet tek këndi i mjeteve dhe, pasi pajiset me vizore, fillon ndërtimin e grafikut në tabelë. Për saktësi ndërtimi secili nga nxënësit merr pika, i zvëndëson në funksion, kryen llogaritjet dhe më pas, përafërsisht i vendos në grafik. Bashkojnë pikat dhe ndërtojnë

grafikun e plotë. Ftojme nxënësit të krahasojnë grafikët e ndërtuar në tabelë dhe komentojmë.

Ushtrimi 5, f. 290. Diagrami paraqet grafikun e $y = f(x)$. Në të njëjtin sistem boshtesh koordinativ skico grafikët e $y = -f(x)$ dhe $y = f(-x)$.

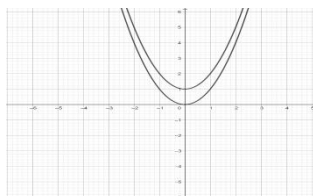
Ftojme dy nxënës njëri pas tjetrit të zgjidhin kërkesën a) të ushtrimit. Për të shmangur vështirësinë e evidentimit të grafikëve nga njëri-tjetri, përdorim lapustila me ngjyra të ndryshme në ndërtimin e tyre. Dikush mund të mendojë se, “Grafikët e $y = f(x)$ dhe $y = -f(x)$ gjithmonë presin boshtin e y -eve në të njëjtën pikë. Grafikët e $y = f(x)$ dhe $y = f(-x)$ gjithmonë presin boshtin e x - eve në të njëjtën pikë.” A ka të drejtë ai? Argumentoni përgjigjen. Vlerësoj aktivizimin dhe pjesëmarrjen. Jap detyrat e shtëpisë.

2.2 Orë mësimore me përdorimin e *GeoGebra*

Tema e mëimit: “Pasqyrimi dhe zgjatja e grafikëve” (19.7, Matematika 10-11, pjesa e dytë, Botimet Mediaprint). Po japim shpjegimin e të njëjtës temë mësimore tek klasa paralele, por duke përdorur metodën e mëimit të përzier dhe ndërthurjen e shpjegimit klasik me përdorimin e teknologjisë (në rastin konkret, tableteve, ose celular dhe aplikacionit *GeoGebra*). Hapat janë plotësisht të njëjtë, gjithashtu edhe shembujt në mënyrë që të evidentohen me lehtësi karakteristikat e përbashkëta dhe të veçanta të dy orëve:

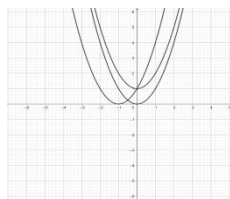
Para se të kalojmë tek tema e ditës fillimisht bëjmë lidhjen me njohuritë e mëparshme, duke përdorur tabelën mësimore për grafikun e funksioni $y = f(x) \pm a$ duke përdorur aplikacionin *GeoGebra* në pajisjet e tyre për të skicuar grafikun e funksionit $y = x^2$ dhe më pas në të njëjtin sistem koordinativ të skicojnë grafikun e funksionit $y = x^2 + 1$. Kemi figurën si më poshtë:

Figura 6. Grafiku i përbashkët i $y = x^2$ dhe $y = x^2 + 1$



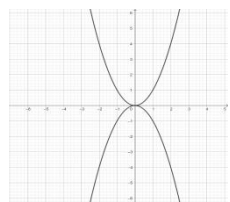
Nxënësit do të kenë përballë grafikun në një kohë tepër të shkurtër dhe do të rikujtojnë shumë shpejt njohuritë e marra. Në të njëjtën mënyrë vazhdojmë me funksionin e trajtës $y = f(x \pm a)$. Nxënësit që duke përdorur aplikacionin *GeoGebra* në pajisjet e tyre në të njëjtin sistem koordinativ për të skicuar grafikun e funksionit $y = (x + 1)^2$.

Figura 7. Grafiku i funksionit $y = (x + 1)^2$ në rastet e $y = f(x \pm a)$



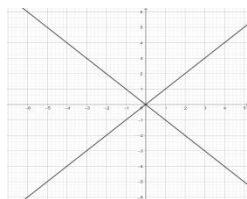
Kalojmë tek mësimi i ditës. Iu shpjegojmë nxënësve se nga funksioni i trajtës $y = f(x)$, mund të përftohen trajta të tjera të tipit: $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, $y = af(x)$ ose $y = f(ax)$. Për secilën nga trajtat marrim nga një shembull, të cilët punohen nga ne fillimisht në pajisjen tablet apo mobile dhe nëpërmjet projektorit iu paraqiten nxënësve, ku secili prej tyre e ripunon në pajisjen personale. Shembujt janë: $y = f(x) \rightarrow y = -f(x)$ dhe $y = x^2 \rightarrow y = -x^2$

Figura 8. Grafiku i përbashkët i funksioneve $y = x^2$ dhe $y = -x^2$



$$y = f(x) \rightarrow y = f(-x), y = x \rightarrow y = -x$$

Figura 9. Grafiku i përbashkët i funksioneve $y = x$ dhe $y = -x$



$$y = f(x) \rightarrow y = f(-x), y = \sqrt{x} \rightarrow y = \sqrt{-x}$$

Figura 10. Grafiku i përbashkët i funksioneve $y = \sqrt{x}$ dhe $y = \sqrt{-x}$

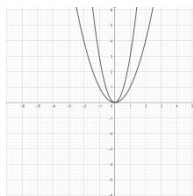


Drejtojmë pyetjen tek nxënësit se çfarë venë re. Pas përgjigjeve të nxënësve, jap pohimet:

- “Grafiku i funksionit $y = f(-x)$ është simetrik me grafikun e funksionit $y = f(x)$ në lidhje me boshtin e $Y'Y$.”
- “Grafiku i funksionit $y = -f(x)$ është simetrik me grafikun e funksionit $y = f(x)$ në lidhje me boshtin e $X'X$.”

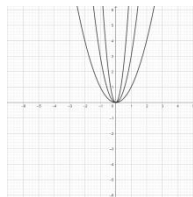
Shohim rastet $y = f(x) \rightarrow y = af(x)$ dhe $y = x^2 \rightarrow y = 3x^2$

Figura 11. Grafiku i përbashkët i funksioneve $y = x^2$ dhe $y = 3x^2$



$$y = f(x) \rightarrow y = f(ax) \text{ dhe } y = x^2 \rightarrow y = (3x)^2$$

Figura 12. Grafiku i përbashkët i funksioneve $y = x^2$ dhe $y = f(ax)$



Drejtojmë pyetjen tek nxënësit se çfarë venë re. Pas përgjigjeve të tyre, japim pohimet:

c) “Për çdo funksion f , transformimi që kalon grafikun e $y = f(x)$ në grafikun e $y = af(x)$ është një zgjatje (shtypje) me koeficient zgjatjeje (shtypjeje) a paralel me boshtin e y -ve.”

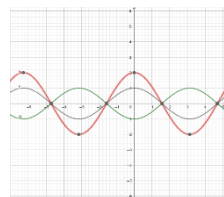
d) “Për çdo funksion f , transformimi që kalon grafikun e $y = f(x)$ në grafikun e $y = f(ax)$ është një zgjatje (shtypje) me koeficient zgjatjeje (shtypjeje) a paralel me boshtin e x -ve.”

Më pas punojmë ushtrimet 1, 2, 3, f. 289, ushtrimi 7 f. 290, ushtrimi 12, 13 f. 293, formulimin e te cilave e kemi dhene seksionin 2.1. Ushtrimet do të punohen individualisht nga secili nxënës në pajisjet e tyre dhe më pas pikat që duhen diskutuar i diskutojmë së bashku.

Më pas në të njëjtin sistem koordinativ ftojmë nxënësit që të skicojnë grafikët e mëposhtëm duke zgjidhur ushtrimin 3 dhe më pas komentojmë së bashku.

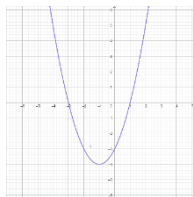
Skico grafikun e a) $y = -\cos x$, b) $y = 2\cos x$

Figura 13. Grafiku i përbashkët i funksioneve $y = -\cos x$ dhe $y = 2\cos x$



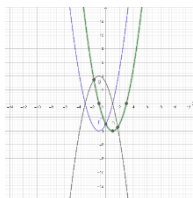
Ushtrimi 5, f. 290 Diagrami paraqet grafikun e $y = f(x)$. Ftojmë nxënësit të shqyrtojnë grafikun në tekstin mësimor dhe të ndërtojnë grafikun së bashku me grafikët e kërkesës duke përdorur aplikacionin *GeoGebra* në pajisjet e tyre. Kopjo skicën. Në të njëjtin sistem boshtesh koordinativ skico grafikët e a) $y = -f(x)$, b) $y = f(-x)$

Figura 14. Grafiku i funksionit $y = x^2 + 2x - 3$



Udhëzojmë nxënësit që për të marrë grafikun e mësipërm në aplikacionin e tyre, funksioni që duhet të vendosin ka trajtën: $y = x^2 + 2x - 3$. Nxënësve duhet vetëm të punojnë me kërkesën e parë të ushtrimit 5 dhe pasi të kenë kryer llogaritjet, të vendosin funksionet në aplikacion.

Figura 15. Grafikë të funksioneve $y = -f(x)$ dhe $y = f(-x)$ nisur nga $y = x^2 + 2x - 3$



Nxënësit ndërtojnë me lehtësi grafikët në pajisjet e tyre dhe evidentojnë se cilit funksion iu përkasin grafikët. Diskutojmë së bashku zhvendosjet që ka pësuar grafiku fillestar. Dikush thote se: “Grafikët e $y = f(x)$ dhe $y = -f(x)$ gjithmonë presin boshtin e y – ve në të njëjtën pikë. Grafikët e $y = f(x)$ dhe $y = f(-x)$ gjithmonë presin boshtin e x – ve në të njëjtën pikë.” A ka të drejtë ai? Argumento përgjigjen.

Ftoj nxënësit të shqyrtojnë me vëmendje grafikët në pajisjen e tyre dhe të diskutojmë për këtë.

Ushtrimi 7, f. 290 Jepet grafiku $y = f(x) = x^3 + 2$. Ndërtojmë së bashku grafikun, të jetë i dukshëm në smartboard dhe secili prej nxënësve në tablet apo pajisje celular .

Figura 16. Grafiku i funksionit $y = f(x) = x^3 + 2$



a) Kopjo skicën dhe në të njëjtin sistem boshtesh koordinativë:
Skico grafikun e:

i) $-f(x)$ ii) $f(-x)$ iii) $-f(-x)$

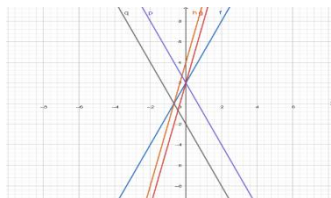
b) Përshkruaj transformimin që kalon $f(x)$ në $-f(-x)$.

Duket qartë nga grafiku se transformimi që kalon nga $f(x)$ në $-f(-x)$ është rrotullim me 180° rreth $(0;0)$.

Ushtrimi 12, f. 293 Diagrami paraqet grafikun e $y = f(x) = 3x + 2$. Grafiku transformohet në mënyra të ndryshme. Lidh simbolin e funksionit me grafikun përkatës.

a) $f(2x)$ b) $2f(x)$ c) $f(-x)$ d) $-f(x)$

Figura 17. Grafikë të funksioneve $y=f(2x)$, $y=2f(x)$, $y=f(-x)$ dhe $y=-f(x)$ nisur nga $y=3x+2$



a) $f(2x)$ -g
 $f(x)$ -q

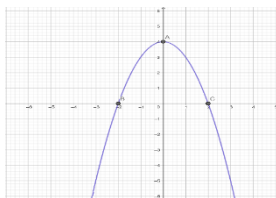
b) $2f(x)$ -h

c) $f(-x)$ -p

d) -

Ushtrimi 13, f. 293 Jepet skicimi i $y = f(x) = -x^2 + 4$

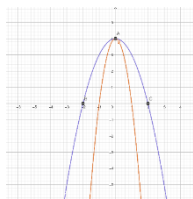
Figura 18. Grafikë të funksioneve $y=f(2x)$, $y=2f(x)$, $y=f(-x)$ dhe $y=-f(x)$ nisur nga $y=3x+2$



Grafiku ka një vlerë maksimale në pikën me koordinata (0; 4). Ai pret boshtin e x-ve në pikat me koordinata (-2; 0) dhe (2; 0).

- Skico grafikun e $y = f(2x)$
- Shkruaj vlerën maksimale të $f(2x)$
- Shkruaj koordinatat e pikës ku $y = f(2x)$ pret boshtin e x-ve.
- Pse $f(2x)$ ka vlerë maksimale?

Figura 19. Grafiku i funksionit $y = f(2x)$ sipas $y = f(x) = -x^2 + 4$



Pasi nxënësit kanë ndërtuar grafikun e mësipërm duket qartë se vlera maksimale e $f(2x)$ është pika me koordinata (0; 4), koordinatat e pikave ku grafiku pret boshtin e x-ve janë (-1; 0) dhe (1; 0) dhe se funksioni $f(2x)$ ka vlerë maksimale sepse termi i x^2 është negativ.

Vlerësoj aktivizimin dhe pjesëmarrjen. Jap detyrat e shtëpisë.

3. KRAHASIMI I TË DY METODAVE TË MËSIMDHËNIES

Krahasohet reagimi i nxënësve të të dy klasave në bazë të: interesit të nxënësve, përqëndrimit të tyre, bashkëveprimit nxënës – mësues, përvetësimit të temës etj., sipas vrojtimit të mësuesit, praktikantëve të tjerë dhe mentorit.

Tabela 1. Krahاسimi i dy metodave të mësimdhënies

Mënyra tradicionale e mësimdhënies	Të përbashkëta	Mënyra e zhvillimit të procesit mësimor përmes përdorimit të teknologjisë
-Interesi i nxënësve humbte herë pas here gjatë zhvillimit të orës mësimore; -Përqendrimi i nxënësve nuk ishte gjithmonë maksimal. -Humbje kohe gjatë shkrimit në tabelë me marker, ndërkohë që nxënësit e kopjonin materialin në fletore. -Ndërtimi i grafikëve në tabelë bëhej me dorë të lirë, gjë që e vështirësonte paraqitjen e saktë të tyre. -Aktivizimi i nxënësve gjatë orës mësimore ishte i kufizuar. -Përgjigjet e nxënësve ishin shpesh të pasigurta dhe jo të plota; vëreheshin vështirësi në dallimin e zhvendosjes së grafikëve dhe njëfarë hezitimi për të dhënë përgjigje. -Bashkëpunimi mësues–nxënës ishte në një nivel të kënaqshëm.	-Zbatimi i planit mësimor hap pas hapi dhe me përpikëri -Realizimi i qëllimit dhe i objektivave të temës mësimore. -Arritja me sukses e rezultateve të të nxënës.	-Interes i lartë i nxënësve gjatë gjithë zhvillimit të orës mësimore. -Përqendrim i madh dhe dëshirë e theksuar për të punuar. -Shfrytëzim maksimal i kohës së orës, duke mundur zgjidhjen e një numri më të madh ushtrimesh. -Ndërtim i saktë dhe i plotë i grafikëve. -Aktivizim i lartë i nxënësve, duke e vendosur nxënësin në qendër të procesit mësimor. -Përgjigje të sakta dhe të sigurta nga nxënësit, të gatshëm për t'u përgjigjur në një kohë shumë të shkurtër. -Bashkëpunim i lartë ndërmjet mësuesit dhe nxënësve. -Komoditet dhe lehtësi më e madhe gjatë zgjidhjes së ushtrimeve. -Nxitje e mendimit kritik tek nxënësit. - Mundësim dhe forcim i një vije logjike më të qartë në të menduar. -Nxitje për formulimin e pohimeve me ndihmën minimale të mësuesit. -Përmirësim i aftësive në përdorimin e pajisjeve teknologjike dhe të programeve kompjuterike.

4. PËRFUNDIME

1. Modeli i mësimit të kombinuar duke përfshirë përdorimin e teknologjisë gjatë zhvillimit të orës mësimore përbën një metodë të dobishme sa i përket përfitimit të nxënësve dhe jo vetëm.
2. *GeoGebra* është një platformë e mirorganizuar, e lehtë në përdorim dhe me përfitime të mëdha në të mësuarin e matematikës.
3. Përdorimi i teknologjisë, konkretisht platformës *GeoGebra* gjatë zhvillimit të orës mësimore ka avantazhe të tilla si: interes dhe përqëndrim më të lartë të nxënësve, bashkëveprim më të madh mësues-nxënës duke theksuar kështu metodën me në qendër nxënësin, lehtësi në shpjegim dhe përvetësim të konceptit për shkak të paraqitjes në mënyrë të saktë nga ana vizuale, si dhe shfrytëzim maksimal i orës në dispozicion.
4. *GeoGebra* u lejon nxënësve eksplorimin e llojeve të funksioneve dhe u ofron mundësinë që ata të bëjnë lidhjet midis paraqitjeve simbolike dhe atyre vizuale.

REFERENCAT

Bernstein L. (2019) New Global Survey Offers Snapshot of Technology in the Classroom <https://edtechmagazine.com/k12/article/2019/02/new-global-survey-offers-snapshot-technology-classroom>.

Cruz S. (2017), *Using GeoGebra to Enhance Mathematics Instruction*, <http://tinyurl.com/ggbslides1>, f. 1-10, Florida Council of Independent Schools.

Ekonomi L., Kafazi D., Cobani S., Cerrava A. (përshtatur) *Strengthening teaching competencies*, Digital Competences, 2022.

Kovacs, Z. (2018) *Modeling computational geometry with GeoGebra*, Conference: Intensive Research Program in Discrete, Combinatorial and Computational.

Phelps S., (2013) *An Introduction to GeoGebra*, Researchgate, <https://www.scribd.com/document/254803924/An-Introduction-To-GeoGebra-pdf>.

Reynolds B. E., Fenton W. E., *College Geometry with GeoGebra*, Willey, 2021.

Spahiu A., Ekonomi L (2026) *Një vlerësim për mësimdhënien e matematikës me GeoGebra në shkollat e mesme*, Buletini Shkencor.

Stols G., *GeoGebra in 10 Lessons*, <http://school-maths.com> faqe 15-32.

Tamam B., Dasari D., *The use of GeoGebra software in teaching mathematics*, IOP Publishing , 2021.

Uwurukundo M. S., Maniraho J. F. and Rwibasira M. T., GeoGebra Integration and Effectiveness in the Teaching and Learning of Mathematics in Secondary Schools [https:// www.researchgate.net/profile/Sagesse-Uwurukundo/publication/348371060_GeoGebra_integration_and_effectiveness_in_the_teaching_and_learning_of_mathematics_in_secondary_schools_A_review_of_literature/links/5ffb37d7299bfl40888846b5/GeoGebra_integration_and_effectiveness_in_the_teaching_and_learning_of_mathematics_in_secondary_schools-A_review_of_literature.pdf?origin=publication_detail](https://www.researchgate.net/profile/Sagesse-Uwurukundo/publication/348371060_GeoGebra_integration_and_effectiveness_in_the_teaching_and_learning_of_mathematics_in_secondary_schools_A_review_of_literature/links/5ffb37d7299bfl40888846b5/GeoGebra_integration_and_effectiveness_in_the_teaching_and_learning_of_mathematics_in_secondary_schools-A_review_of_literature.pdf?origin=publication_detail) f. 1-14.

Wassie Y. A., Zergaw G. A., *Some of the Potential Affordances, Challenges and Limitations of Using GeoGebra in Mathematics Education*, 2019 <https://www.ejmste.com/download/some-of-the-potential-affordances-challenges-and-limitations-of-using-geogebra-in-mathematics-7691.pdf> f. 3-11.

GeoGebra Handbook for Senior Secondary Mathematics Teachers, Regional Institute of Education, Mysuru, 2016.

GeoGebra Manual, The official manual of GeoGebra, CET, 2016.