

**PËRDORIMI I APLIKACIONIT *GEOGEBRA* NË MËSIMIN E
MATEMATIKËS:
ZBATIM TEK ANALIZA MATEMATIKE**

Ronaldo ZEQRIR¹
Lorenc EKONOMI²

¹Shkolla e Bashkuar “Lozhan i Ri”, ZVA Maliq,
ronaldo1zeqir@yahoo.com

²Fakulteti i Shkencave Natyrore dhe Shkencave Humane,
Universiteti “Fan S. Noli”, Korçë
lekonomi@unkorce.edu.al

Abstrakti

Rritja e pjesëmarrjes aktive të nxënësve gjatë orës mësimore ka qenë dhe vazhdon të mbetet një ndër sfidat kryesore të procesit mësimor.

Megjithatë, zhvillimi i teknologjisë ka krijuar mundësi të reja për përdorimin e mjeteve dhe strategjive bashkëkohore, të cilat ndikojnë pozitivisht në mësimdhënien me në qendër nxënësin. Një nga aplikacionet që ka dhënë rezultate konkrete në këtë drejtim është GeoGebra.

Bazuar në studime të ndryshme, GeoGebra ndikon pozitivisht në rritjen e performancës së nxënësve dhe studentëve, si dhe në përmirësimin e të kuptuarit të koncepteve matematikore. Në këtë punim është analizuar trajtimi i disa koncepteve të analizës matematike përmes përdorimit të këtij aplikacioni.

Për këtë qëllim, GeoGebra është përdorur gjatë orëve mësimore me 18 nxënës të klasës së dymbëdhjetë në gjimnazin “Faik Konica” në qytetin e Korçës, me synim evidentimin e perceptimeve dhe mendimeve të nxënësve lidhur me zhvillimin e orës mësimore. Nëpërmjet pyetësorëve dhe opinioneve të drejtpërdrejta të mbledhura gjatë procesit mësimor, u arrit në përfundimin se përdorimi i GeoGebra-s ndihmon ndjeshëm në të kuptuarin e koncepteve të analizës matematike. Aplikacioni e bën matematikën më të thjeshtë, më të qartë dhe më konkrete, duke mundësuar vizualizim dhe analizë grafike të koncepteve përkatëse.

Fjalët kyçe: *GeoGebra, vizualizim, mësimdhënie, limit, varg, funksion*

USING THE *GEOGEBRA* APPLICATION IN TEACHING MATHEMATICS: APPLICATION TO THE MATHEMATICAL ANALYSIS

Abstract

Increasing active participation by students in a lesson is one of the problems that has existed and still continues today. But the advancement of technology allows us to use new tools and strategies that positively affect student-centered teaching. One of the applications that has yielded results in this regard is the GeoGebra application. Based on studies, GeoGebra has a positive effect on increasing the performance of students and students as well as on understanding concepts.

In this paper, we have analyzed the teaching of some mathematical analysis concepts. For this purpose, GeoGebra was used for 18 twelfth grade students at the "Faik Konica" high school in the city of Korça to see the perceptions and opinions of students regarding the lesson. Through questionnaires and direct opinions during the lesson, it turned out that GeoGebra helps a lot in understanding the concepts of mathematical analysis, making mathematics simpler, clearer and more concrete through the visualization and graphical analysis that are made of these concepts.

Keywords: *GeoGebra, visualization, teaching, limit, sequence, function*

HYRJE

Metodat tradicionale të mësimdhënies, në shumicën e rasteve, i bëjnë nxënësit të ndihen të pasigurt dhe shpesh i çojnë ata drejt mendimit se nuk janë të aftë për të përvetësuar materialin mësimor. Për të përmirësuar mësimdhënien e matematikës, është i domosdoshëm një ndryshim i qasjes mësimore, duke kaluar nga mësimdhënia e përqendruar te mësuesi në një mësimdhënie me në qendër nxënësin.

Mësimdhënësit efektivë, në ditët e sotme, zgjedhin përdorimin e teknologjisë për të ndihmuar në zhvillimin e të kuptuarit të koncepteve matematikore te nxënësit, duke nxitur interesin e tyre dhe duke rritur aftësitë e tyre në këtë lëndë.

Teknologjia e Informacionit dhe Komunikimit (TIK) i referohet përdorimit të teknologjive të reja dhe bashkëkohore në fusha të ndryshme. Hulumtimet e kryera në nivel ndërkombëtar kanë treguar se përdorimi i TIK-ut, i kombinuar me metoda të përshtatshme mësimdhënieje, mund të çojë në përmirësimin e ndjeshëm të të nxënit te nxënësit. Aktualisht, ekzistojnë shumë mjete softuerike dinamike

që ndikojnë pozitivisht në procesin e mësimdhënies dhe të mësimnxënies së matematikës, duke i ndihmuar nxënësit të kuptojnë konceptet në mënyrë më kuptimplotë dhe funksionale.

Kështu, Këshilli Kombëtar i Mësuesve të Matematikës (National Council of Teachers of Mathematics, 2000) thekson rëndësinë e përdorimit të vizualizimeve të shumta në përmirësim e të menduarit dhe arsyetuarit matematikor të fëmijëve. Programet softuerike u mundësojnë nxënësve të krijojnë lehtësisht lidhjet ndërmjet koncepteve dhe kuptimit të tyre, gjë që do të ishte mjaft e vështirë për t'u arritur pa mjete të tilla dinamike. Prandaj, paraqitja vizuale e koncepteve matematikore është shumë më e rëndësishme për individët me arritje të ulëta (Moyer-Packenham, Ulmer & Anderson, 2012). Ka një shumëllojshmëri burimesh digjitale për mësimdhënien e matematikës në lidhje me gjeometrinë, për shembull, përdorimi i DMS (Sistemi Dinamik i Gjeometrisë), Geometr's Sketchpad dhe Cabri. Por shumë prej atyre aplikacioneve softuerike nuk janë krijuar me një qasje të veçantë pedagogjike. Po ashtu, disa programe nuk mund t'i aksesojmë pa pagesë.

GeoGebra është një program matematikor dinamik në të cilin mund të shfaqim dhe të zgjidhim probleme në gjeometri, algjebër, analizë, trigonometri, statistikë etj. Ky program është zhvilluar nga Markus Hohenwarter dhe një ekip ndërkombëtar programuesish. Emri i këtij programi është i përbërë nga fjalët GEOMETRY dhe alGEBRA.

Bazuar mbi një studim, Myers (1993) zhvilloi një mjedis mësimi që përfshinte një bazë të dhënash hipermediale në vendet e Amerikës Qendrore. Ishte një vëzhgim për nxënësit e shkollave të mesme, që përdorte sistemin brenda një kuadri problemash duke patur për qëllim zotërimin e përmbajtjes dhe aftësive të të menduarit. Studimi raportoi se strategjitë për zgjidhjen e problemeve lehtësojnë të menduarin e nivelit të lartë vetëm kur ai shoqërohet me mbështetjen e mësuesve.

Në një studim doktore që vlerëson një modelprogrami teknologjik për zhvillimin e aftësive të të menduarit kritik të nxënësve të shkollave të mesme, Jacks (1996) raportoi një përmirësim të aftësive të të menduarit kritik gjatë një periudhe 3-vjeçare. Për të vlerësuar studimin, të dhënat cilësore në formën e anketës u kryen pyetësorë, intervista të thelluara, vëzhgime dhe ekzaminime të dokumenteve dhe raporteve. Studimi ishte mbështetur nga të dhënat sasiore të mbledhura nga dy teste të të menduarit kritik, përkatësisht Testi i

Mendimit Kritik Cornell, Niveli X (Ennis, Millman & Tomko, 1985) dhe Testi i Eseve të Mendimit Kritik Ennis-Weir (Ennis & Weir, 1985).

Bakar, Ayub, Luan dhe Tarzimi (2002) krahasuan GeoGebra-n me një program softuerësh të krijuar prej tyre në dy grupe nxënësish të shkollave të mesme malajziane dhe zbuluan se nxënësit që përdorin softuerin GeoGebra për të studiuar temat e transformimit arritën rezultate më të mira se studentët që përdorin softuerin e krijuar. Studime të tjera mbi përdorimin e aplikacionit GeoGebra në mësimdhënie përfshijnë punimet e Kemp (2006), Doğan (2010), Herceg dhe Herceg (2010), Erhan (2013), Leong (2013), Tusiime dhe François (2020), Seloraji dhe EU (2017), Jelatu, Sariyasa dhe Ardana (2018), si dhe Singh (2018). Në këto studime u evidentua se integrimi i GeoGebra-s në mësimdhënien e Gjeometrisë çoi në rritjen e performancës së nxënësve dhe studentëve.

Autorët konfirmojnë se përdorimi i këtij aplikacioni në mësimdhënien e Gjeometrisë u ofron nxënësve mundësi për të eksploruar në mënyrë të detajuar konceptet gjeometrike dhe i ndihmon ata ta përvetësojnë më mirë lëndën, duke e bërë “të tyre” gjeometrinë. Nxënësit mund ta përdorin aplikacionin në mënyrë të pavarur dhe të përvetësojnë konceptet matematikore me mbështetje minimale nga mësuesi.

Nga analiza e literaturës së shqyrtuar rezulton se rreth 80% e studimeve tregojnë se GeoGebra është efektive në mësimdhënien e matematikës, ndërsa vetëm 20% e tyre nuk evidentojnë ndikim pozitiv, pasi grupet e studiara nuk shfaqën ndryshime të ndjeshme në performancë. Kjo tregon se, megjithëse GeoGebra rezulton kryesisht efektive, suksesi i saj varet në masë të madhe nga mënyra e integritimit dhe përdorimit të saj në procesin mësimor.

1. ZBATIME TË GEOGEBRA NË ANALIZËN MATEMATIKE

1.1 Shkarkimi i GeoGebra

Për të shkarkuar GeoGebra shkojmë tek www.geogebra.org dhe në dritaren që shfaqet klikojmë tek *Start Calculator*. Më tej gjejmë programin e përshtatshëm për kompjuterin tonë duke shkuar tek *App Downloads*. Klikojmë tek *GeoGebra Classic 6 Installer for Windows* dhe shohim që programi fillon të shkarkohet. Më pas do të ndjekim

hapat e tjerë duke klikuar me Yes/Ok. Pas shkarkimit të programit do të na shfaqet si në vijim:

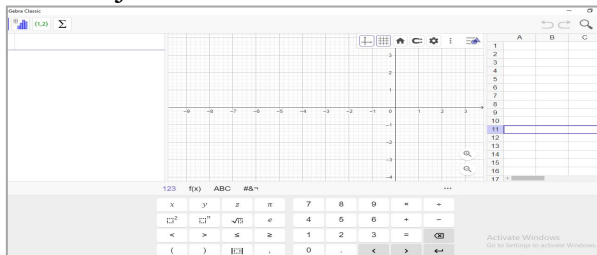


Figura 1. Shfaqja e GeoGebra

Në anën e majtë kemi *Algebra View*, në qendër kemi *Graphic View*, dhe në të djathtë kemi *Spreadsheet*. Nëse klikojmë tek *Input* do të na shfaqet poshtë *graphics* një tastierë ku do të shkruajmë simbolet, ekuacionet apo formulat matematikore.

1.2 Shembull i një parabole

Shqyrtojmë parabolën $y = ax^2 + bx + c$. Shkruajmë tek *Input box* $y = ax^2 + bx + c$. Automatikisht krijohen rreshqitësit (*sliders*) për cdo konstante a, b, c , të cilat ne mund t'i lëvizim sipas rastit dhe në varësi të problemit tonë. Tek *Graphics* shohim që shfaqet parabola e cila mund të ndryshojë në varësi të vlerave të parametrave a, b dhe c . Në rastin konkret kemi $f(x) = 2x^2 + x - 1.1$. Problemit po i shtojmë kërkesat e tjera, si:

- Gjeni rrënjët e ekuacionit $2x^2 + x - 1.1 = 0$.
- Gjeni pikën maksimum dhe minimum të funksionit në segmentin $[-2, 2]$.

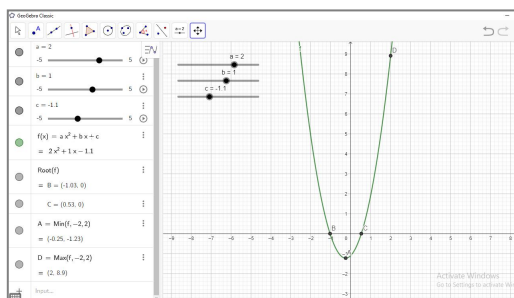


Figura 2. Zgjidhja e shembullit me GeoGebra

Nga figura e mësipërme shohim që funksioni është parabola $f(x) = 2x^2 + x - 1.1 = 0$.

a) Me anë të komandës “*root*” gjejmë rrënjët, duke shkruar tek input *root(f)*, shohim që në grafik do të shfaqen pikat B(-1.03,0) dhe C(0.53,0), abshisat e të cilave janë rrënjët e ekuacionit $2x^2+x-1.1=0$.

b) Për të gjetur min dhe max në segmentin $[-2,2]$ përdorim përkatësisht komandat *min(f,-2,2)* dhe *max(f,-2,2)*. Marrim $A=(-0.25,-1.23)$ që është kulmi i parabolës dhe pika $D=(2.8,9)$.

1.3 Limiti i vargut numerik dhe funksionit

Në analizën matematike, limit të një vargu kemi quajtur numrin L , të tillë që, kur indeksi i termave shkon në infinit, termat e vargut shkojnë tek numri L . Një varg i tillë quhet konvergjent. Përkufizime të ngjashme jepen për vargjet që konvergjojnë në $+\infty(-\infty)$, ashtu si dhe për vargjet divergjente. Në mënyrë të ngjashme, në qoftë se vlerat e variablit të pavarur x shkojnë tek numri a , atëherë vlerat $f(x)$ shkojnë tek numri L , themi se funksioni f ka limit numrin L kur variabli i pavarur x shkon tek a . Po kështu jepet kuptimi i limitit të funksionit kur x shkon tek $+\infty(-\infty)$ ose kur limit është $+\infty(-\infty)$. Limiti i një funksioni f lidhet me limitin e vargjeve në kuptimin që: konditë e nevojshme dhe e mjaftueshme që limiti i funksionit f , kur x shkon tek a , është numri L , është që për çdo varg a_n që konvergjon tek a , vargu korrespondues $f(a_n)$ konvergjon tek numri L .

Po konkretizojmë grafikisht me ndihmën e GeoGebra konvergjencat e përmendura. Në ushtrimin e mëposhtëm dy rastet e para janë raste të vargjeve numerike, të tjerët janë raste të funksioneve, ku variabli i pavarur është shënuar me n dhe kuptimi i limitit të funksionit jepet me ndihmën e vargjeve, bazuar tek kondita e nevojshme dhe e mjaftueshme e përmendur më sipër.

Ushtrim 1. Të shqyrtohen konvergjencat e vargjeve numerike dhe funksioneve:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}, \lim_{n \rightarrow \infty} n^2, \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n}, \lim_{n \rightarrow 0} n^2$$

Fillimisht duhet të ndërtojmë grafikisht vargjet e mësipërme, meqë nuk kemi parametrat x dhe y , por do të kemi n dhe a_n . Shkojmë tek *Settings* dhe në *xAxis* dhe *yAxis* tek *Label* shënojmë përkatësisht n dhe a_n . Tani jemi gati për të vazhduar me shqyrtimin e sjelljes së vargjeve. Shkruajmë *Sequence* dhe do të shfaqet dritarja dialoguese ku shfaqen gjithë opsionet për të. Do të zgjedhim *Sequence((n,((1)/(n))),n,0,10.)*. Pikët do të jenë nga 0 deri në 10, por mund të zgjedhim edhe të tjera.

Për vargun tjetër do të shënojmë $Sequence((n, n^2), n, 0.1, 3, 0.2)$ duke shtuar dhe inkrementin 0.2 për të patur pika më afër njëra-tjetrës. Nga grafiku duken qartë rezultatet e shënuara në figurë për gjetjen e limiteve. Kur shkojmë drejt infinitit për vargun $\frac{1}{n}$ pikat tek boshti i a_n shkojnë drejt zeros, ndërsa kur shkojmë drejt zeros, pikat tek boshti i a_n shkojnë drejt ∞ . Për vargun n^2 kur shkojmë drejt infinitit pikat tek boshti i a_n shkojnë drejt ∞ , ndërsa kur shkojmë drejt 0, pikat tek boshti i a_n shkojnë drejt 0.

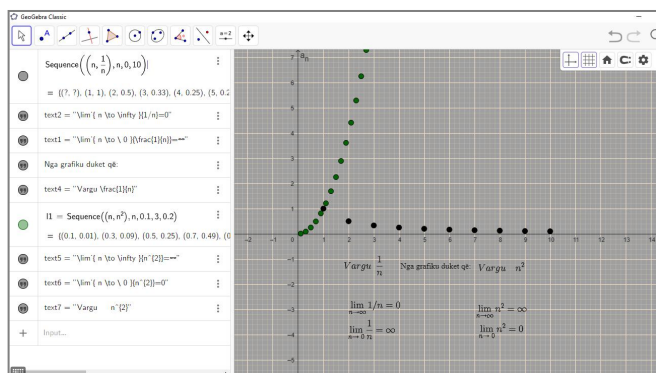


Figura 3. Limiti i vargut $\frac{1}{n}$ dhe n^2

Ushtrim 2. Të shqyrtohen limitet e funksioneve:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n^2-1}, \lim_{n \rightarrow 0} \frac{n-1}{n^2-1}, \lim_{n \rightarrow 1} \frac{n-1}{n^2-1}, \lim_{n \rightarrow -1} \frac{n-1}{n^2-1}.$$

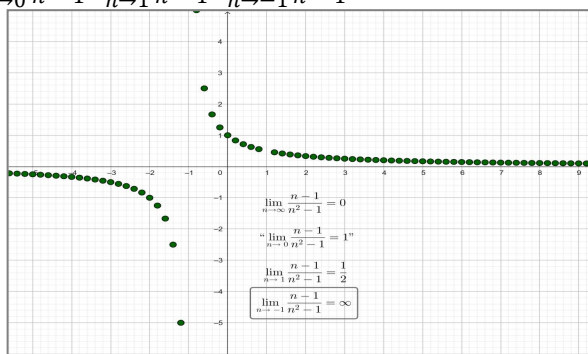


Figura 4. Vargu $\frac{n-1}{n^2-1}$

Në të njëjtën mënyrë si tek shembulli i mësipërm do të përdorim komandën *Sequence*, më pas me anë të grafikut të ndërtuar shohim cili është limiti i këtij vargu. Kur $n \rightarrow \infty$ pikat e vargut tentojnë të

shkojnë tek 0. Kur $n \rightarrow 0$, shohim që ekziston një pikë korresponduese tek a_n që është 1. Kur $n \rightarrow -1$, shohim që pikat e grafikut të vargut sa vjen largohen nga njëra-tjetra, por mund të shohim nga grafiku që pikat e vargut rriten pambarimisht duke shkuar drejt ∞ . Për $n=1$ nuk kemi vlerë korresponduese tek a_n , sepse në këtë rast kemi të bëjmë me një formë të pacaktuar $(\frac{0}{0})$. Megjithatë duke u bazuar në drejtimin e pikave të vargut ne mundemi që t'a gjejmë këtë limit. Shohim se ky limit do të jetë $\frac{1}{2}$.

1.4 Numri e

Numri i njohur $e = 2.718...$ mund të gjendet si limit i vargut. Nëse jepet vargu me term të përgjithshëm $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ dhe duam të gjejmë limitin e tij kur n rritet pambarimisht, atëherë ky limit do të jetë i barabartë me e .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Le ta interpretojmë këtë rezultat grafikisht (Grafiku 3.6).

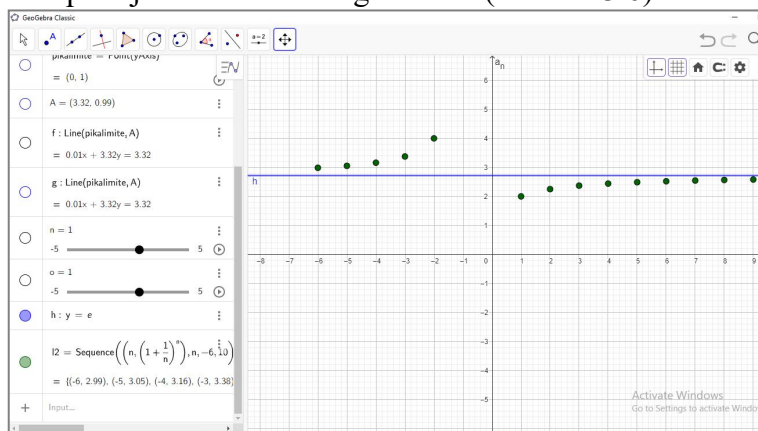


Figura 5. Numri e

Nga grafiku duhet të dallojmë rastin se për n -negative (shihet si funksion), pikat e vargut tentojnë t'i afrohen limitit e kur n shkon në infinit, pra:

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

1.5 Numri π

Numri i njohur $\pi = 3.14\dots$ është një zbatim tjetër i limitit të vargut.

Nëse jepet vargu me term të përgjithshëm $a_n = \frac{2n \sin(\frac{\pi}{n})}{2}$ dhe duam të gjejmë limitin e tij kur n shkon tek infinit, atëherë ky limit do të jetë i barabartë me π .

Nga grafiku duhet të dallojmë rastin se për n -negative (konsiderohet funksion) (Figura 7), pikat e vargut tentojnë t'i afrohen $a_n = \pi$, kur n zvogëlohet pambarimisht, pra:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n \sin(\frac{\pi}{n})}{2} = \pi \text{ dhe } \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{2n \sin(\frac{\pi}{n})}{2} = \pi$$

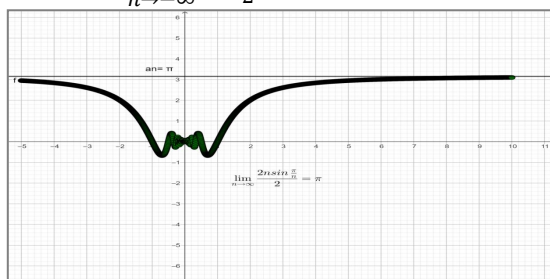


Figura 6. Numri π

1.6 Asimptotat

Drejtëza $y=L$ quhet asimptotë horizontale e funksionit $y=f(x)$, nëse vlerat e funksionit shkojnë tek L , kur variabli i pavarur shkon në $+\infty(-\infty)$. Drejtëza $x=a$ quhet asimptotë vertikale, nëse vlerat $f(x)$ shkojnë tek $+\infty(-\infty)$, kur vlerat e x shkojnë tek a . Drejtëza $y=ax+b$ quhet asimptotë e pjerrët e f , në qoftë se vlerat e diferencës $f(x)-(ax+b)$ shkojnë tek 0 , kur vlerat e x shkojnë tek $+\infty(-\infty)$.

Ushttrim 3. Për funksionin $f(x) = \frac{1}{x}$ të studiohen asimptotat

horizontale dhe vertikale.

Nga njohuritë e analizës matematike gjejmë se $x=0$ është asimptotë vertikale, ndërsa $y=0$ është asimptotë horizontale.

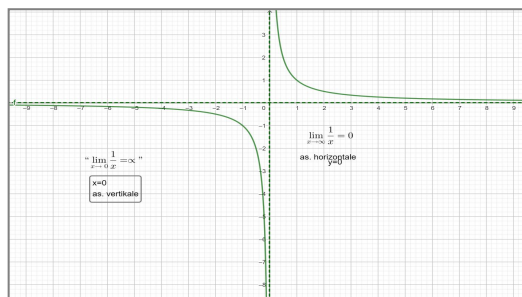


Figura 7. Asimptotat horizontale dhe vertikale të $f(x) = \frac{1}{x}$

Ushtrim 4. Të gjendet asimptotat e funksionit $f(x) = \frac{x^2 + 9}{x + 1}$.

Gjendet nga analiza matematike se $x=-1$ është asimptote vertikale, ndërsa $y=x-1$ është asimptotë e pjerrët.

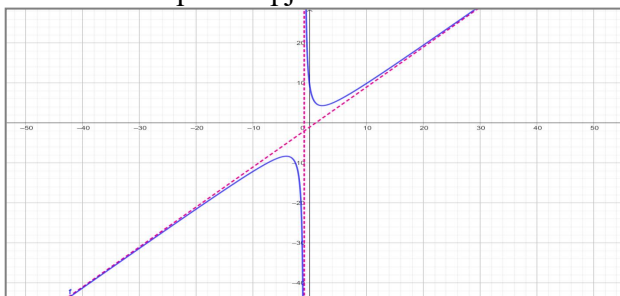


Figura 8. Asimptota vertikale dhe e pjerrët e $f(x) = \frac{x^2 + 9}{x + 1}$

2. EFEKTI I GEOGEBRA NË MËSIMDHËNIEN E ANALIZËS MATEMATIKE

Në kuadër të tematikës së trajtuar në këtë punim, u realizua një studim mbi ndikimin e aplikacionit GeoGebra në mësimdhëniën e matematikës, duke u përqendruar konkretisht në disa koncepte të analizës matematike, si: koncepti i limitit të vargut, limitit të funksionit, derivatit, ekstremeve të funksionit dhe asimptotave të tij. Studimi u zhvillua përmes organizimit të disa orëve mësimore me një grup nxënësish të klasës së dymbëdhjetë. Mbledhja e të dhënave u realizua në terren, duke përdorur metodën e anketimit. Në total u shpërndanë 18 pyetësorë për nxënësit e klasës së dymbëdhjetë (12B) të gjimnazit “Faik Konica” në qytetin e Korçës, menjëherë pas

përfundimit të orëve mësimore të zhvilluara me përdorimin e aplikacionit GeoGebra.

Pyetësi përmbante gjithsej 12 pyetje, të ndara në dy seksione kryesore. Seksioni i parë ofronte informacion të përgjithshëm mbi të anketuarit, duke u fokusuar në variabla të tillë si: gjinia, mosha, nota mesatare në matematikë, perceptimi i vështirësisë së lëndës së matematikës, disiplina matematike e konsideruar më e vështirë, përdorimi i mjeteve teknologjike në përgjithësi dhe përdorimi i tyre në ndihmë të mësimdhënies.

Seksioni i dytë jepte informacion mbi opinionin e nxënësve lidhur me përdorimin e aplikacionit GeoGebra në mësimdhënien e matematikës. Ky seksion fokusohet në variabla si: ndikimi i GeoGebra-s në rritjen e interesit dhe argëtimit gjatë orës mësimore, qartësimi i koncepteve matematikore, nevoja për përdorim më të shpeshtë të GeoGebra-s në mësimdhënien e matematikës, ndihma që aplikacioni ofron në kuptimin e koncepteve të limitit dhe derivatit, vizualizimi i koncepteve matematike, si dhe sugjerimet dhe mendimet e nxënësve mbi orën mësimore. Pyetjet e pyetësorit ishin kryesisht me alternativa, të ndërtuara sipas shkallës Likert, me përjashtim të pyetjes së fundit, e cila ishte e hapur dhe synonte të merrte opinionin e lirë të nxënësve lidhur me orën mësimore.

Realizimi i këtij studimi shoqërohej edhe me disa kufizime, të cilat mund të kenë ndikuar në rezultatet e tij, duke mos ofruar një pasqyrë plotësisht të plotë të problematikës së trajtuar. Së pari, studimi u zhvillua në gjimnazin me orientim gjuhësor “Faik Konica” në qytetin e Korçës, ku niveli i njohurive dhe zotërimit të koncepteve matematikore nga nxënësit ishte relativisht i ulët. Zhvillimi i kësaj forme mësimdhënieje edhe në klasa të tjera do të ndihmonte në krijimin e një panorame më të qartë dhe më gjithëpërfshirëse.

Së dyti, studimi u kufizua nga numri i vogël i orëve mësimore të zhvilluara nga autori (Ronaldo) në këtë shkollë. Zhvillimi i më shumë orëve mësimore me aplikacionin GeoGebra, si dhe trajtimi i temave të tjera ku nxënësit shfaqën vështirësi, do të kontribuonte në një vlerësim më të saktë të efektivitetit të këtij aplikacioni.

Së treti, moshtirja e kësaj forme mësimdhënieje edhe në shkolla të tjera, me nivele të ndryshme arsimore, si brenda qytetit ashtu edhe në qytete të tjera, nuk lejon nxjerrjen e një përfundimi të përgjithshëm në nivel kombëtar.

Analiza e përgjigjeve paraqitet si vijon.

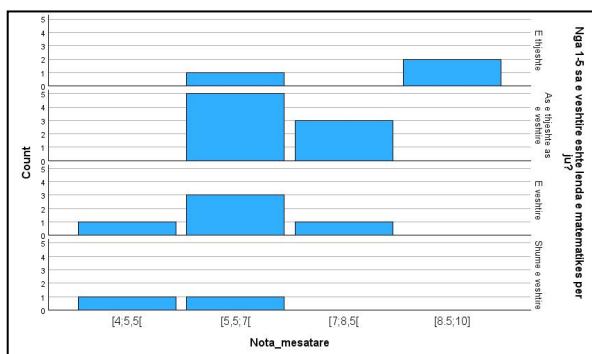


Figura 9. Lidhja midis notës mesatare në matematikë dhe vështirësisë së saj. Burimi: Llogaritje e autorit

Në figurën 9 shohim intervalin ku ndodhet nota mesatare aktuale e matematikës për 18 nxënës si dhe sa e vështirë është matematika për ata. Dy nxënës me notë mesatare shumë të ulët mendojnë se është shumë e vështirë, nga katër nxënës me notë mesatare që bën pjesë në $[7; 8.5[$, njëri mendon që është e vështirë dhe tre të tjerë që është as e thjeshtë as e vështirë. Ndërsa dy nxënës me notë mesatare $[8.5; 10]$ mendojnë që është e thjeshtë. Ajo që duhet vënë re është se 50% e klasës është me notë mesatare që bën pjesë në $[5.5; 7[$, relativisht e ulët, për katër prej tyre është e vështirë dhe shumë e vështirë dhe për pesë prej tyre është as e thjeshtë as e vështirë dhe për një është e thjeshtë. Kjo tregon se nxënësit me mesatare të ulët nga $[4-7[$, zënë rreth 67% të klasës, si dhe për pjesën më të madhe të tyre matematika është e vështirë.

Në tabelën 1 kemi përgjigjet për pyetjen e disiplinës më të vështirë, nxënësve pasi ju është sqaruar se çfarë përmban secila prej disiplinave, kanë zgjedhur ato disiplina që ata kanë pasur më shumë vështirësi gjatë tre viteve të shkollës së mesme. Ajo që vihet re është se, Analiza Matematike është zgjedhur nga 11 nxënës si disiplina më e vështirë duke u ndjekur nga Algjebra dhe Trigonometria me nga 7 nxënës, dhe më pas Statistika, Gjeometria dhe Probabiliteti. Kjo tregon se 61.1% e klasës kishin vështirësi në temat e disiplinës së Analizës Matematike pra në limitet, derivatet dhe integralet si dhe 38.9% në funksionet trigonometrikë, po ashtu u shprehën se kishin më tepër vështirësi në ndërtimet e grafikëve të funksioneve.

		Responses		Percent of Cases
		N	Përqindje	
Disiplina më e vështirë në matematikë	Algjebra	7	21.2%	38.9%
	Gjeometria	2	6.1%	11.1%
	Trigonometria	7	21.2%	38.9%
	Analiza Matematike	11	33.3%	61.1%
	Statistika	4	12.1%	22.2%
	Probabiliteti	2	6.1%	11.1%
Total		33	100.0%	183.3%

Tabela 1. Disiplina më e vështirë (zgjedhje e shumëfishtë) Burimi: Autori

	N	Minimumi	Maximumi	Mesatarja	Devijimi standard
Me zhvillimin e teknologjisë mësuesit duhet të përdorin teknologjinë në mësimdhënie në ndihmë të saj.	18	3	5	4.39	.698
Mjete të tilla softuerike si GeoGebra, Desmos etj, duhet të përdoren më tepër në shpjegimin e koncepteve matematike.	18	2	5	4.00	.970
Nëpërmjet GeoGebra unë e kam të qartë konceptin e limitit dhe derivatit.	18	3	5	4.22	.647
Integrimi i GeoGebra është efektiv në rritjen e performancës sime, në drejtim të të menduarit të nivelit të lartë, paraqitjeve, ndërtimit të grafikëve dhe interpretimit dhe vizualizimit të tyre.	18	2	5	3.94	.802
N	18				

Tabela 2. Përgjigjet e pyetjeve në shkallën Likert. Burimi: Autori

Tabela e mësipërme jep në mënyrë të përmbledhur përgjigjet e katër pyetjeve të pyetësorit që janë në shkallën Likert. Minimumi tregon sa persona nga 18 që janë në total, nuk pajtohen aspak ndërsa maksimumi personat që janë plotësisht dakord. Nga tabela 2 shohim se numri i personave që janë plotësisht dakord është më i madh se ata që nuk pajtohen aspak. Po ashtu do të shohim kolonën e mesatares: Intervali nga 1-1.8, tregon që nuk pajtohen aspak; nga 1.81-2.60, tregon që nuk janë dakord; nga 2.61-3.40, tregon që as pajtohen dhe as janë dakord; nga 3.41-4.20, tregon që janë dakord dhe nga 4.21-5, tregon që janë plotësisht dakord.

Nga analiza e përgjigjeve vërehet se nxënësit janë dakord me faktin se mjete të tilla softuerike duhet të përdoren më shpesh në shpjegimin e

koncepteve matematikore. Gjithashtu, integrimi i aplikacionit GeoGebra në mësimdhënie rezulton efektiv në rritjen e performancës së nxënësve, veçanërisht në zhvillimin e të menduarit të nivelit të lartë, në përmirësimin e paraqitjeve grafike, ndërtimin e grafikëve, si dhe në interpretimin dhe vizualizimin e koncepteve matematikore. Po ashtu, nxënësit shprehen plotësisht dakord se, me zhvillimin e teknologjisë, mësuesit duhet ta integrojnë atë në procesin mësimor si një mjet ndihmës, ndërsa nëpërmjet përdorimit të GeoGebra-s ata e kanë më të qartë kuptimin e koncepteve të limitit dhe derivatit.

Pyetjes: *“Mendoni se GeoGebra e bën mësimdhënien e matematikës më argëtuese dhe të këndshme dhe ju ndihmon për t'i kuptuar konceptet matematikore më mirë?”* iu përgjigjën pozitivisht 89% e nxënësve të anketuar. Nxënësit theksojnë se GeoGebra i ndihmoi në kuptimin më të mirë të koncepteve të limitit dhe derivatit të funksionit, duke i bërë ato më të qarta dhe më konkrete përmes vizualizimit grafik. Gjithashtu, ata pohojnë se kjo formë mësimdhënieje duhet të përdoret më gjerësisht edhe në tema të tjera të matematikës, si gjeometria dhe trigonometria.

3. PËRFUNDIME

Në funksion të qëllimit dhe objektivave të këtij punimi, bazuar në rishikimin e literaturës, realizimin e studimit dhe analizat e kryera, arritëm në këto përfundime:

- Mësimdhënia e matematikës është një proces kompleks dhe kërkon përdorimin e metodave, strategjive dhe mjeteve të ndryshme për të arritur rezultate sa më të mira në të nxënë. Me zhvillimin e teknologjisë, mësuesit duhet ta përdorin atë si mjet ndihmës për të përmirësuar procesin mësimor dhe jo për të zëvendësuar mësimdhënien tradicionale.
- Nga studimi i realizuar në gjimnazin “Faik Konica” rezulton se mësimdhënia me ndihmën e aplikacionit GeoGebra e bën më të qartë dhe më të kuptueshëm trajtimin e koncepteve matematikore. Kjo lidhet kryesisht me mundësinë e vizualizimit të tyre përmes grafikëve dy- dhe tredimensionalë.
- Përdorimi i GeoGebra-s ndihmoi nxënësit ta perceptojnë matematikën si një lëndë më të thjeshtë dhe më të kapshme. Veçanërisht për nxënësit me arritje relativisht të ulëta,

aplikacioni kontribuoi në përmirësimin e kuptimit të koncepteve që më parë paraqisnin vështirësi.

- GeoGebra nxit zhvillimin e të menduarit të nivelit të lartë, ndërtimin e modeleve matematikore, vizualizimin dhe interpretimin e koncepteve, si dhe ndikon pozitivisht në rritjen e performancës së nxënësve në matematikë.
- Nxënësit shprehen se GeoGebra i paraqet ekuacionet, formulat dhe konceptet matematikore në mënyrë më konkrete dhe më të qartë vizualisht, si dhe sugjerojnë që kjo formë mësimdhënieje të aplikohet edhe në tema të tjera, si gjeometria dhe trigonometria.

Mbi këtë bazë, rekomandojmë që:

- Mësuesit të japin udhëzime të qarta dhe të sakta për përdorimin e aplikacionit GeoGebra, duke filluar me shembuj të thjeshtë dhe duke avancuar gradualisht drejt ushtrimeve më komplekse.
- Mësuesit të nxisin eksplorimin dhe eksperimentimin me GeoGebra, pasi ky aplikacion dinamik u mundëson nxënësve të kuptojnë konceptet matematikore përmes vizualizimit.
- GeoGebra të integrohet në përputhje me kurrikulën jo vetëm në matematikë, por edhe në lëndë të tjera si fizika, kimia apo ekonomia.
- Të organizohen trajnime për mësuesit nga ekspertë të fushës, me qëllim njohjen dhe përdorimin sa më efektiv të programeve softuerike arsimore.
- Duke qenë se ky studim u fokusua vetëm në temat e limitit dhe derivatit për shkak të kufizimeve të përmendura, rekomandohet realizimi i studimeve të tjera në tema të ndryshme mësimore, në klasa të tjera dhe në zona të ndryshme, si urbane ashtu edhe rurale.

BIBLIOGRAFIA

Bakar, K. A., Ayub, A. F. M, Luan, W. S., & Tarmizi, R. A. (2002). Exploring secondary school students' motivation using technologies in teaching and learning mathematics. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 14, 4650-4654.

Ciric, M., Luzanin, Z., Zekic A., Durasevic S. & Dimitrijevic, S. (2021). Forcimi i kompetencave të mësimdhënies. Kompetencat digjitale. (Ekonomi,

L., Kafazi, D., Çobani, S. & Çërava, A. Trans.) *Strengthening Teaching Competences in Higher Education in Natural and Mathematical Science*. University of Nis. TeComp. www.tecomp.ni.ac.rs, 38-44 & 97-100.

Currell, J. (2022) How to put Bruner's key theories into teaching practice. <https://mathsnoproblem.com/blog/teaching-tips/jerome-bruner-theories-put-into-practice>

Dogan, M., İçel, R. (2010). Effect of Using GeoGebra on Students' Success: An Example about Triangles. Paper presented at *Third International Conference on Innovations in Learning for the Future 2010: e-learning: First Eurasia Meeting of GeoGebra (EMG)*. Istanbul, Turkey, 11-13 May 2010.

Ekonomi, L. (2016). *Hyrje në Analizën Matematike*. (pp.19-23).

Ennis, R. H., Millman, J., Tomko, T. N. (1985). Cornell Critical Thinking Tests Level X & Level Z: Manual. *Pacific Grove, CA: Midwest Publications*.

Ennis, R. H., Weir, E. E. (1985). The Ennis-Weir Critical Thinking Essay Test: An instrument for teaching and testing. *Pacific Grove, CA: Midwest Publications*.

Erhan S. H., Andreasen, J. (2013). Exploring calculus with dynamic mathematics software. *Mathematics and Computer Education*, 47(1), 6-18.

Herceg, D., Herceg, D. (2010). Numerical integration with GeoGebra in high school. *The International Journal for Technology in Mathematics*, 17(4), 205-210.

Hohenwarter, J., Hohenwarter, M. (2011). *Introduction to GeoGebra* (pp 7-11). <http://www.geogebra.org/book/intro-en/>

Jacks, M. J. (1996). An Evaluation of a model technology program intended to develop critical thinking abilities of junior high school students. Unpublished doctoral dissertation, University of Southern California.

Kemp, A. (2006). Clocks, angles and functions. *Mathematics Teaching*, 198, (pp.35-37).

Katherine, K. (2020). 5 Effective Strategies for Teaching Math In Today's High School Classroom <https://moorethanjustx.com/effective-strategies-for-teaching-math/>

Leong, K. E. (2013). Impact of Geometer's Sketchpad on students achievement in graph functions. *The Malaysian Online Journal of Educational Technology*, 1(2), 19-31.

Moyer-Packehman, P. S., Ulmer, L. A. & Anderson, K. L. (2012). Examining Pictorial Models and Virtual Manipulatives for Third-Grade Fraction Instruction. *Journal of Interactive Online Learning*, 11(3), 1541-4914.

Myers, R. J. (1993). Problem-Based Learning: A case study in integrating teachers, students, methods and hypermedia data bases. Unpublished doctoral dissertation, Virginia Polytechnic Institute and State University.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Palla, I. (2022). *Njohuri Matematike dhe Zbatime*. Universiteti “Fan S. Noli”, Korçë (pp. 103-140).

RAND Mathematics Study Panel, Ball, D. L. (2003). Teachers’ mathematical knowledge: It’s development and use in teaching. In *Mathematical Proficiency for All Students: Toward a Strategic Research and Development Program in Mathematics Education* 15-28. RAND Corporation. <http://www.jstor.org/stable/10.7249/mr1643oeri.9>

Rapp, W. H. (2009). Avoiding Math Taboos: Effective Math Strategies for Visual-Spatial Learners. *TEACHING Exceptional Children Plus*, 6(2)